

---



---

## Exercícios Resolvidos de Física Básica

**Jason Alfredo Carlson Gallas**, professor titular de física teórica,  
Doutor em Física pela Universidade Ludwig Maximilian de Munique, Alemanha

**Universidade Federal da Paraíba (João Pessoa, Brasil)**  
Departamento de Física



Baseados na **SEXTA** edição do “Fundamentos de Física”, Halliday, Resnick e Walker.

Esta e outras listas encontram-se em: <http://www.fisica.ufpb.br/~jgallas>

---



---

## Contents

<b>33 Indutância</b>	<b>2</b>
33.1 Questões . . . . .	2
33.2 Problemas e Exercícios . . . . .	2
33.2.1 Indutância – (1/8) . . . . .	2
33.2.2 Auto-Indução – (9/13) . . . . .	5
33.2.3 Circuitos $RL$ – (14/28) . . . . .	6
33.2.4 Energia Armazenada num Campo Magnético – (29/37) . . . . .	9
33.2.5 Densidade de Energia de um Campo Magnético – (38/46) . . . . .	11
33.2.6 Indutância Mútua – (47/53) . . . . .	12

Comentários/Sugestões e Erros: favor enviar para [jasongallas @ yahoo.com](mailto:jasongallas@yahoo.com) (sem “br” no final...)  
(listaq3.tex)

## 33 Indutância

### 33.1 Questões

#### Q 33-2.

Quando o fluxo magnético que atravessa cada espira de uma bobina é o mesmo, a indutância da bobina pode ser calculada por  $L = N\Phi_B/i$  (Eq. 33-2). Como poderíamos calcular  $L$  de uma bobina para a qual tal hipótese não é válida?

► Basta computar a fem para cada uma das espiras, soma-las, e depois usar  $\mathcal{E} = -L di/dt$  para obter o valor de  $L$ .

#### Q 33-4.

Desejamos enrolar uma bobina de modo que ela tenha resistência mas essencialmente nenhuma indutância. Como fazer isto?

► Uma maneira de fazer é enrolar o fio que compõe a bobina em duas camadas, de modo que a corrente passe nelas em sentidos contrários. Deste modo a indutância tenderá para zero.

### 33.2 Problemas e Exercícios

#### 33.2.1 Indutância – (1/8)

#### E 33-1.

A indutância de uma bobina compacta de 400 espiras vale 8 mH. Calcule o fluxo magnético através da bobina quando a corrente é de 5 mA.

► Como  $N\Phi = Li$ , onde  $N$  é o número de espiras,  $L$  é a indutância e  $i$  a corrente, temos

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{Li}{N} = \frac{(8 \times 10^{-3} \text{ H})(5 \times 10^{-3} \text{ A})}{400} \\ &= 1 \times 10^{-7} \text{ Wb.}\end{aligned}$$

#### E 33-2.

Uma bobina circular tem um raio de 10 cm e é formada por 30 espiras de arame enroladas muito próximas. Um campo magnético externo de 2.60 mT é perpendicular à bobina. (a) Não havendo corrente na bobina, qual é o fluxo através dela? (b) Quando a corrente na bobina é

de 3.8 A, num certo sentido, o fluxo líquido através da bobina é nulo. Qual é a indutância da bobina?

► (a)

$$\begin{aligned}\Phi_B &= NBA = NB(\pi r^2) \\ &= (30)(2.6 \times 10^{-3})(\pi)(10 \times 10^{-2})^2 \\ &= 2.45 \times 10^{-3} \text{ Wb.}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}L &= \frac{\Phi_B}{i} = \frac{2.45 \times 10^{-3}}{3.80} \\ &= 6.45 \times 10^{-4} \text{ H/m.}\end{aligned}$$

Preste atenção nas *unidades* envolvidas.

#### E 33-3.

Um solenóide é enrolado com uma única camada de fio de cobre isolado (diâmetro = 2.5 mm). Ele tem 4 cm de diâmetro e um comprimento de 2 m. (a) Quantas espiras possui o solenóide? (b) Qual é a indutância por metro de comprimento, na região central do solenóide? Suponha que as espiras adjacentes se toquem e que a espessura do isolamento seja desprezível.

► (a) O número  $N$  de espiras multiplicado pelo diâmetro de cada espira deve ser igual ao comprimento do fio. Portanto, temos

$$N = \frac{\ell}{d_{\text{fio}}} = \frac{2}{2.5 \times 10^{-3}} = 800 \text{ espiras.}$$

(b)  $N\Phi_B = NBA = (n\ell)(\mu_0 n i)(A) = Li$ . Portanto, simplificando a corrente, segue

$$\begin{aligned}\frac{L}{\ell} &= \mu_0 n^2 A = (4\pi \times 10^{-7}) \left(\frac{800}{2}\right)^2 \pi (0.02)^2 \\ &= 2.53 \times 10^{-4} \text{ H/m.}\end{aligned}$$

#### P 33-4.

Um solenóide longo e estreito, pode ser curvado de modo a formar um toróide. Mostre que, para um solenóide suficientemente longo e estreito, a equação que dá a indutância do toróide (Eq. 33-7) assim formado é equivalente à de um solenóide (Eq. 33-4) com um comprimento apropriado.

► Para um solenóide muito comprido, com o qual desejamos construir um toróide, escrevemos a indutância em função do número total de espiras,  $N$ , e não de

$n = N/\ell$ , a densidade de espiras por unidade de comprimento. As expressões da indutância para um solenóide e um toróide são, respectivamente,

$$L_S = \mu_0 n^2 \ell A = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A,$$

$$L_T = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Para poder comparar estas fórmulas, expandimos o logaritmo que aparece em  $L_T$ . Para que isto seja possível assumimos que o toróide tenha dimensões suficientemente grandes tais que  $x = b/a \simeq 1$ , ou seja, tal que  $b \simeq a$ . Calculando (ou simplesmente olhando numa Tabela qualquer), vemos que para um valor arbitrário  $x \geq 1/2$  o logaritmo pode ser representado pela seguinte série de potências:

$$\ln x = \left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 + \dots$$

Considerando apenas o primeiro termo na série acima, segue, para  $x = b/a$ :

$$\ln x \simeq \frac{x-1}{x} = \frac{b/a-1}{b/a} = \frac{b-a}{b},$$

de modo que

$$L_T \simeq \frac{\mu_0 N^2 h (b-a)}{2\pi b}.$$

Observando agora que  $h(b-a) = A$  e que  $2\pi b \simeq \ell$  obtemos, nestas condições, que, realmente,

$$L_S \simeq L_T.$$

Como para um toróide sempre temos  $b > a$ , da expansão do logaritmo acima vemos que a aproximação feita é bastante boa.

### P 33-5.

*Indutores em série.* Dois indutores  $L_1$  e  $L_2$  estão ligados em série e separados por uma distância grande. (a) Mostre que a indutância equivalente é dada por  $L_{\text{eq}} = L_1 + L_2$ . (b) Por que a separação entre os indutores tem de ser grande para que a relação acima seja válida? (c) Qual é a generalização do item (a) para  $N$  indutores em série?

► (a) Nas condições discutidas abaixo, no item (b), a conservação da energia requer que a queda de tensão  $\mathcal{E}$ , ao atravessarmos os dois indutores, seja igual à soma das quedas ao atravessarmos cada indutor separadamente:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2.$$

Como a corrente que atravessa os três indutores em questão é exatamente a mesma, da definição de indutância, podemos escrever

$$\mathcal{E} = -L_{\text{eq}} \frac{di}{dt}, \quad \mathcal{E}_1 = -L_1 \frac{di}{dt}, \quad \mathcal{E}_2 = -L_2 \frac{di}{dt}.$$

Substituindo estes valores na equação acima e simplificando obtemos

$$L_{\text{eq}} = L_1 + L_2.$$

(b) A expressão acima será válida sempre que o fenômeno de *indução mútua* puder ser desprezado. Para tanto é preciso que  $L_1$  e  $L_2$  estejam bem afastados, como requerido pelo problema. O caso em que a indutância mútua não pode ser desprezada é tratado explicitamente no Problema 33-49, adiante.

(c) Quando tivermos  $N$  indutores em série (e *sem* a presença de indução mútua!), vemos facilmente que  $\mathcal{E} = \sum_{k=1}^N \mathcal{E}_k$  e, conseqüentemente, que  $L_{\text{eq}} = \sum_{k=1}^N L_k$ .

### P 33-6.

*Indutores em paralelo.* Dois indutores  $L_1$  e  $L_2$  estão ligados em paralelo e separados por uma distância grande.

(a) Mostre que a indutância equivalente é dada por

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}.$$

(b) Por que a separação entre os indutores tem de ser grande para que a relação acima seja válida? (c) Qual a generalização do item (a) para  $N$  indutores separados?

► Este problema é análogo e sua resposta tem a mesma fundamentação teórica do Problema 33-5.

(a) Da definição de ligação em paralelo vemos que agora vale  $i = i_1 + i_2$ , sendo que a queda de tensão nos três componentes em questão é a mesma,  $\mathcal{E}$ . Portanto

$$\mathcal{E} = -L_{\text{eq}} \frac{di}{dt}, \quad \mathcal{E} = -L_1 \frac{di_1}{dt}, \quad \mathcal{E} = -L_2 \frac{di_2}{dt}.$$

Substituindo estes valores na relação

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt},$$

obtida derivando-se  $i = i_1 + i_2$ , segue facilmente que

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}.$$

(b) A justificativa é idêntica à do item (b) do Problema 33-5.

(c) Para  $N$  indutores em paralelo, estendendo o cálculo feito no item (a) acima, obtemos

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{L_k}.$$

**P 33-7.**

Uma tira larga de cobre (largura  $W$ ) é curvada formando um tubo de raio  $R$  com duas extensões planas, como mostra a Fig. 33-14. Uma corrente  $i$  flui através da tira, distribuída uniformemente sobre sua largura. Fez-se, deste modo, um “solenóide de uma única espira”. (a) Deduza uma expressão para o módulo do campo magnético  $\mathbf{B}$  na parte tubular (longe das bordas). (Sugestão: Suponha que o campo magnético fora deste solenóide de uma única espira seja desprezível.) (b) Determine a indutância deste solenóide de uma única espira, desprezando as duas extensões planas.

► (a) Aplicando-se a lei de Ampère à parte tubular, tal como feito no caso do solenóide, produz

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = BW = \mu_0 i,$$

donde tiramos

$$B = \frac{\mu_0 i}{W}.$$

(b) O fluxo é

$$\Phi_B = BA = \frac{\mu_0 i}{W} \pi R^2.$$

Sabemos que  $N\Phi_B = Li$ . Como temos uma única espira,  $N = 1$ , e, portanto,

$$N\Phi_B = \frac{\mu_0 i}{W} \pi R^2 = Li$$

o que implica que

$$L = \frac{\mu_0 \pi R^2}{W}.$$

► (a) Observe que podemos considerar o tubo como “composto” por  $N$  espiras, cada uma transportando uma corrente  $\Delta i = i/N$ . Neste caso, estaremos tratando de um solenóide para o qual a densidade de espiras por unidade de comprimento é  $n = N/W$ .

Assim sendo, usando a Eq. 31-12, pág. 194, para o solenóide ideal, encontramos, notando que  $i_0 \equiv \Delta i$ ,

$$B = \mu_0 i_0 n = \mu_0 \left(\frac{i}{N}\right) \left(\frac{N}{W}\right) = \frac{\mu_0 i}{W},$$

que coincide com o valor acima.

**P 33-8.**

Dois fios longos e paralelos, cada um com raio  $a$ , cujos centros estão separados por uma distância  $d$ , são percorridos por correntes iguais mas em sentidos opostos. Mostre que, desprezando o fluxo dentro dos próprios fios, a indutância para um comprimento  $\ell$  deste par de fios é dada por:

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}.$$

Veja o Exemplo 31-3, pag. 188. (Sugestão: calcule o fluxo através de um retângulo que tem os fios como lados).

► A área de integração para o cálculo do fluxo magnético é limitada pelas duas linhas tracejadas na Figura abaixo e pelas bordas do fio.

Se a origem for escolhida como estando sobre o eixo do fio à direita e  $r$  medir a distância a partir deste eixo, a integração se estenderá desde  $r = a$  até  $r = d - a$ .

Considere primeiramente o fio à direita. Na região de integração o campo que ele produz *entra* na página e tem magnitude  $B = \mu_0 i / 2\pi r$ . Divida a região em tirinhas de comprimento  $\ell$  e largura  $dr$ , como indicado. O fluxo através da tirinha a uma distância  $r$  do eixo do fio é  $d\Phi = B\ell dr$  e o fluxo através da região toda é

$$\Phi = \frac{\mu_0 i \ell}{2\pi} \int_a^{d-a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i \ell}{2\pi} \ln \left(\frac{d-a}{a}\right).$$

O outro fio produz o mesmo resultado, de modo que o fluxo total através do retângulo tracejado é

$$\Phi_{\text{Total}} = 2\Phi = \frac{\mu_0 i \ell}{\pi} \ln \left(\frac{d-a}{a}\right).$$

Portanto, temos para a indutância total

$$L = \frac{\Phi_{\text{Total}}}{i} = \frac{\mu_0 \ell}{\pi} \ln \left(\frac{d-a}{a}\right).$$

► A indutância  $L$  também pode ser encontrada combinando-se a lei da indução de Faraday e a Eq. 33-11, de modo que

$$-L \frac{di}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

O fluxo é calculado pela seguinte integral:

$$\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}.$$

A área de integração para o fluxo é a área de uma espira formada por dois fios imaginários adicionados para conectar os dois fios dados, fechando o circuito. O comprimento dos novos fios é muito pequeno comparado com o comprimento dos fios iniciais; assim, podemos ignorar a contribuição daqueles. Então, o campo magnético  $B$  é a soma dos dois campos magnéticos dos fios iniciais. Note que os dois campos possuem o mesmo sentido (para dentro da página) e, portanto, segundo a Lei de Ampère (Eq. 17 do Cap. 31, pag. 191), temos:

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} + \frac{\mu_0 i}{2\pi(d-r)}.$$

$B(r)$  não varia na direção paralela aos fios e, portanto, para  $dA$  utilizamos um retângulo muito estreito de comprimento  $\ell$  e largura  $dr$ ; escolhendo o sentido de  $dA$  para dentro da página (o mesmo sentido de  $B$ ), temos:

$$\begin{aligned} \Phi_B &= \int B(r) \ell dr \cos 0^\circ \\ &= \frac{\mu_0 i \ell}{2\pi} \int \left[ \frac{1}{r} + \frac{1}{d-r} \right] dr \\ &= \frac{\mu_0 i \ell}{\pi} \ln \left( \frac{d-a}{a} \right). \end{aligned}$$

Donde se conclui que

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 \ell}{\pi} \frac{di}{dt} \ln \left( \frac{d-a}{a} \right) = L \frac{di}{dt}.$$

Portanto, sem levar em consideração o fluxo dentro do fio, encontramos:

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{\pi} \ln \left( \frac{d-a}{a} \right).$$

### 33.2.2 Auto-Indução – (9/13)

**E 33-9.** Num dado instante, a corrente e a fem induzida num indutor têm os sentidos indicados na Fig. 33-15. **(a)** A corrente está crescendo ou decrescendo? **(b)** A fem vale 17 V e a taxa de variação da corrente é 25 kA/s; qual é o valor da indutância?

► **(a)** Como  $\mathcal{E}$  aumenta  $i$ , a corrente  $i$  deve estar decrescendo.

**(b)** De  $\mathcal{E} = L di/dt$  obtemos

$$L = \frac{\mathcal{E}}{di/dt} = \frac{17}{2.5 \times 10^3} = 6.8 \times 10^{-4} \text{ H}.$$

#### E 33-10.

Um indutor de 12 H transporta uma corrente constante de 2 A. De que modo podemos gerar uma fem auto-induzida de 60 V no indutor?

► Como  $\mathcal{E} = -L(di/dt)$ , basta fazer com que a corrente varie a uma taxa de

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} = \frac{60 \text{ V}}{12 \text{ H}} = 5 \text{ A/s}.$$

#### E 33-11.

Um solenóide cilíndrico longo com 100 espiras/cm tem um raio de 1.6 cm. Suponha que o campo magnético que ele produz seja paralelo ao eixo do solenóide e uniforme em seu interior. **(a)** Qual é a sua indutância por metro de comprimento? **(b)** Se a corrente variar a uma taxa de 13 A/s, qual será a fem induzida por metro?

► **(a)** O “difícil” aqui é converter corretamente o número de espiras:

$$\begin{aligned} n &= 100 \text{ espiras/cm} = 100 \text{ espiras}/(10^{-2} \text{ m}) \\ &= 10^4 \text{ espiras/m}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{L}{\ell} &= \mu_0 n^2 A = (4\pi \times 10^{-7})(10^4)^2 \pi (0.016)^2 \\ &= 0.1 \text{ H/m}. \end{aligned}$$

**(b)** Desprezando o sinal, temos

$$\frac{\mathcal{E}}{\ell} = \frac{L}{\ell} \frac{di}{dt} = 0.1 \text{ H/m} \times 13 \text{ A/s} = 1.3 \text{ V/m}.$$

#### E 33-12.

A indutância de uma bobina compacta é tal que uma fem de 3 mV é induzida quando a corrente varia a uma taxa de 5 A/s. Uma corrente constante de 8 A produz um fluxo magnético de  $40 \mu\text{Wb}$  através de cada espira. **(a)** Calcule a indutância da bobina. **(b)** Quantas espiras tem a bobina?

► **(a)** A menos do sinal, temos

$$L = \frac{\mathcal{E}}{di/dt} = \frac{3 \times 10^{-3} \text{ V}}{5 \text{ A/s}} = 6 \times 10^{-4} \text{ H}.$$

(b) Da definição do fluxo concatenado obtemos

$$N = \frac{L i}{\Phi_B} = \frac{(6 \times 10^{-4} \text{ H})(8 \text{ A})}{40 \times 10^{-6} \text{ Wb}} = 120 \text{ espiras.}$$

**P 33-13.**

A corrente  $i$  que percorre um indutor de 4.6 H varia com o tempo  $t$  conforme é mostrado no gráfico da Fig. 33-16. A resistência do indutor vale 12  $\Omega$ . Determine a fem induzida  $\mathcal{E}$  durante os intervalos de tempo (a) de  $t = 0$  até  $t = 2$  ms; (b) de  $t = 2$  até  $t = 5$  ms; (c) de  $t = 5$  até  $t = 6$  ms. (Ignore o comportamento nas extremidades dos intervalos.)

► Use  $\mathcal{E} = L di/dt$  extraindo  $di/dt$  do gráfico dado. Aqui, perceba que as diferenças devem sempre ser tomadas entre o valor final menos o valor inicial para que o sinal da inclinação esteja correto.

(a) Para  $0 < t < 2$  ms:

$$\mathcal{E} = L \frac{\Delta i}{\Delta t} = 4.6 \frac{7.0 - 0.0}{(2.0 - 0.0) \times 10^{-3}} = 1.6 \times 10^4 \text{ V.}$$

(b) Para  $2 \text{ ms} < t < 5$  ms:

$$\mathcal{E} = L \frac{\Delta i}{\Delta t} = 4.6 \frac{5.0 - 7.0}{(5.0 - 2.0) \times 10^{-3}} = -3.1 \times 10^3 \text{ V.}$$

(c) Para  $5 \text{ ms} < t < 6$  ms:

$$\mathcal{E} = L \frac{\Delta i}{\Delta t} = 4.6 \frac{0.0 - 5.0}{(6.0 - 5.0) \times 10^{-3}} = -2.3 \times 10^4 \text{ V.}$$

Observe que o sinal das tensões reproduz a inclinação das curvas no gráfico dado, apesar de estarmos aqui ignorando o sinal negativo da fem induzida.

**E 33-14.**

A corrente num circuito  $RL$  atinge um terço de seu valor de equilíbrio em 5 segundos. Calcule a constante indutiva de tempo.

► Nesta situação de carga, a corrente no circuito é determinada pela equação

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-Rt/L}\right).$$

O valor de equilíbrio,  $\mathcal{E}/R$ , “é atingido” em  $t = \infty$ . Conseqüentemente, a equação que fornece a resposta do problema é

$$\frac{1}{3} \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-5R/L}\right),$$

ou seja,

$$-\frac{5R}{L} = \ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) = -0.4055.$$

Portanto,

$$\tau_L \equiv \frac{L}{R} = \frac{5}{0.4055} = 12.33 \text{ s.}$$

**33.2.3 Circuitos  $RL$  – (14/28)**

**E 33-15.**

Em termos da constante de tempo  $\tau_L$ , quanto tempo devemos esperar para que a corrente num circuito  $RL$  cresça ficando a 0.1% do seu valor de equilíbrio?

► Usando a Eq. 33-18, obtemos:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-t/\tau_L}\right).$$

Desejamos determinar o valor de  $t$  para o qual  $i = 0.999 \mathcal{E}/R$ . Isto significa

$$\left(1 - \frac{0.1}{100}\right) \frac{\mathcal{E}}{R} = 0.999 \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-t/\tau_L}\right),$$

isto é

$$0.999 = 1 - e^{-t/\tau_L}$$

ou seja

$$e^{-t/\tau_L} = 0.001.$$

Calculando o logaritmo natural obtemos

$$-\frac{t}{\tau_L} = \ln(0.001) = -6.908,$$

ou seja,  $t = 6.908\tau_L$ , que é a resposta procurada.

**E 33-16.**

A corrente num circuito  $RL$  cai de 1 A para 10 mA no primeiro segundo após a remoção da bateria do circuito. Sendo  $L = 10$  H, calcule a resistência  $R$  do circuito.

► A corrente no circuito é dada por

$$i(t) = i_0 e^{-t/\tau_L},$$

onde  $i_0$  é a corrente (no instante  $t = 0$ ) e  $\tau_L (= L/R)$  é a constante de tempo indutiva. Desta equação obtemos

$$\begin{aligned} \tau_L &= -\frac{t}{\ln[i/i_0]} \\ &= -\frac{1 \text{ s}}{\ln[(10 \times 10^{-3} \text{ A})/(1 \text{ A})]} = 0.217 \text{ s.} \end{aligned}$$

Portanto  $R = L/\tau_L = (10 \text{ H})/(0.217 \text{ s}) = 46\Omega$ .

**E 33-17.**

Quanto tempo, após a remoção da bateria, a diferença de potencial através do resistor num circuito  $RL$  (com  $L = 2$  H,  $R = 3$   $\Omega$ ) decai a 10% de seu valor inicial?

► A corrente durante a descarga é controlada pela equação  $i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-Rt/L}$ , sendo que, como sempre, a diferença de potencial é dada por  $v_R(t) = Ri(t)$ . Portanto, o problema consiste em determinar-se o onstante  $t$  que satisfaz a condição

$$0.1 v_R(0) = v_R(t),$$

ou seja  $0.1 \mathcal{E} = \mathcal{E} e^{-3t/2}$ , de onde tiramos

$$\ln 0.1 = -3t/2$$

$$t = 1.54 \text{ s.}$$

**E 33-19.**

Um solenóide de indutância igual a  $6.3$   $\mu\text{H}$  está ligado em série a um resistor de  $1.2$  k $\Omega$ . (a) Ligando-se uma bateria de  $14$  V a esse par, quanto tempo levará para que a corrente através do resistor atinja 80% de seu valor final? (b) Qual é a corrente através do resistor no instante  $t = \tau_L$ ?

► (a) Se a bateria for ligada ao circuito no instante  $t = 0$ , a corrente num instante  $t$  posterior é dada por

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau_L}),$$

onde  $\tau_L = L/R$ . O problema pede para achar o instante  $t$  para o qual  $i = 0.8 \mathcal{E}/R$ . Isto significa termos

$$0.8 = 1 - e^{-t/\tau_L}$$

ou seja

$$e^{-t/\tau_L} = 0.2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} t &= -\ln(0.2)\tau_L = 1.609 \tau_L \\ &= \frac{1.609 L}{R} \\ &= \frac{1.609 \times 6.3 \times 10^{-6} \text{ H}}{1.2 \times 10^3 \Omega} = 8.45 \times 10^{-9} \text{ s.} \end{aligned}$$

(b) Para  $t = \tau_L$  a corrente no circuito é

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-1}) = \left( \frac{14 \text{ V}}{1.2 \times 10^3 \Omega} \right) (1 - e^{-1})$$

$$= 7.37 \times 10^{-3} \text{ A.}$$

**E 33-20.**

O fluxo concatenado total através de uma certa bobina de  $0.75$   $\Omega$  de resistência vale  $26$  mW, quando é percorrida por uma corrente de  $5.5$  A. (a) Calcular a indutância da bobina. (b) Se uma bateria de  $6$  V for subitamente ligada à bobina, quanto tempo levará para que a corrente cresça de  $0$  até  $2.5$  A?

► (a) A indutância pedida é

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{26 \times 10^{-3}}{5.5} = 4.7 \times 10^{-3} \text{ H.}$$

(b) Isolando-se  $t$  da Eq. (33-18), que dá o crescimento da corrente, temos

$$\begin{aligned} t &= -\tau_L \ln \left( 1 - \frac{iR}{\mathcal{E}} \right) \\ &= -\frac{L}{R} \ln \left( 1 - \frac{iR}{\mathcal{E}} \right) \\ &= -\frac{4.7 \times 10^{-3}}{0.75} \ln \left( 1 - \frac{(2.5)(0.75)}{6.0} \right) \\ &= 2.4 \times 10^{-3} \text{ s.} \end{aligned}$$

**P 33-21.**

► Usando a regra das malhas obtemos

$$\mathcal{E} - L \frac{di}{dt} = iR,$$

ou seja

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= L \frac{di}{dt} + iR \\ &= L \frac{d}{dt} (3 + 5t) + (3 + 5t)R \\ &= (6)(5) + (3 + 5t)(4) \\ &= (42 + 20t) \text{ V.} \end{aligned}$$

**P 33-22.**

► A equação que rege a tensão no indutor é

$$V_i = \mathcal{E} e^{-t_i/\tau_L},$$

onde o subíndice  $i = 1, 2, \dots, 8$ , serve para indicar convenientemente o instante de tempo que queremos considerar. Utilizando agora dois pontos quaisquer da

Tabela dada, por exemplo  $t = 1$  ms e  $t = 2$  ms, vemos que:

$$V_1 = \mathcal{E}e^{-t_1/\tau_L}, \quad V_2 = \mathcal{E}e^{-t_2/\tau_L},$$

ou seja, que

$$\frac{V_2}{V_1} = e^{[-t_2 - (-t_1)]/\tau_L} = e^{(t_1 - t_2)/\tau_L}.$$

Portanto

$$\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \frac{t_1 - t_2}{\tau_L},$$

de onde obtemos que

$$\tau_L = \frac{t_1 - t_2}{\ln(V_2/V_1)} = \frac{1.0 \text{ ms} - 2.0 \text{ ms}}{\ln(13.8/18.2)} = 3.6 \text{ ms}.$$

Agora, para obter o valor de  $\mathcal{E}$ , basta usar o fato que  $V_i = \mathcal{E}e^{-t_i/\tau_L}$ , substituindo-se nesta fórmula qualquer um dos pontos da Tabela. Por exemplo, usando-se o primeiro ponto da Tabela obtemos:

$$\mathcal{E} = V_1 e^{-t/\tau_L} = (18.2)e^{-1.0/3.6} = 24 \text{ V}.$$

Observe que na expressão acima usamos milissegundos como unidade de tempo, para abreviar os cálculos.

É fácil conferir agora que a equação

$$V_i = 24e^{-t_i/(3.6 \times 10^{-3})} \text{ Volts}$$

permite obter-se corretamente qualquer um dos outros pontos na Tabela.

### P 33-23.

► Para obter o resultado pedido, basta computar a derivada de ambos lados da Eq. (33-18):

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - e^{-Rt/L} \right) \right] \\ &= \frac{\mathcal{E}}{L} e^{-Rt/L} \\ &= \left( \frac{45.0}{50.0 \times 10^{-3}} \right) e^{-\frac{(180)(1.20 \times 10^{-3})}{50.0 \times 10^{-3}}} \\ &= 12.0 \text{ A/s}. \end{aligned}$$

### P 33-24.

► (a) Como a circunferência interna do toróide é  $\ell = 2\pi a = 2\pi(10 \text{ cm}) = 62.8 \text{ cm}$ , o número de espiras do toróide é aproximadamente  $N = 62.8 \text{ cm}/1.0 \text{ mm} = 628$ . Portanto, da Eq. (33-7), temos

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(4\pi \times 10^{-7})(628)^2(0.12 - 0.10)}{2\pi} \ln \frac{12}{10} \\ &= 2.9 \times 10^{-4} \text{ H}. \end{aligned}$$

(b) Como o comprimento total do fio é  $\ell = (628)(4)(2.0 \times 10^{-2}) = 50 \text{ m}$ , a resistência do fio é  $R = (50 \text{ m})(0.02 \Omega/\text{m}) = 1 \Omega$ . Portanto,

$$\tau_L = \frac{L}{R} = \frac{2.9 \times 10^{-4}}{1} = 2.9 \times 10^{-4} \text{ s}.$$

### P 33-25.

Na Figura 33-17,  $\mathcal{E} = 100 \text{ V}$ ,  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 20 \Omega$ ,  $R_3 = 30 \Omega$  e  $L = 2 \text{ H}$ . Determine os valores de  $i_1$  e  $i_2$  (a) imediatamente após o fechamento da chave  $S$ ; (b) muito tempo depois do fechamento de  $S$ ; (c) imediatamente após  $S$  ser aberta outra vez; (d) muito tempo depois da abertura de  $S$ .

► (a) O indutor impede um crescimento rápido da corrente através dele, de modo que imediatamente após a chave  $S$  ser fechada a corrente no indutor é zero (= circuito aberto). Isto significa que

$$i_1 = i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} = \frac{100 \text{ V}}{10 \Omega + 20 \Omega} = 3.33 \text{ A}.$$

(b) Muito tempo depois do fechamento do circuito a corrente através do indutor atinge o valor de equilíbrio e praticamente não mais se altera. A fem através do indutor é zero e ele comporta-se como se estivesse sido substituído por um pedaço de fio. A corrente em  $R_3$  é  $i_1 - i_2$ . A lei de Kirchhoff para as malhas fornece

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - i_1 R_1 - i_2 R_2 &= 0, \\ \mathcal{E} - i_1 R_1 - (i_1 - i_2) R_3 &= 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{\mathcal{E}(R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \\ &= \frac{100 \times (20 + 30)}{10 \times 20 + 10 \times 30 + 20 \times 30} = 4.55 \text{ A}, \\ i_2 &= \frac{\mathcal{E} R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \\ &= \frac{100 \times 30}{10 \times 20 + 10 \times 30 + 20 \times 30} = 2.73 \text{ A}. \end{aligned}$$

(c) Neste caso a malha do lado esquerdo está aberta. Como a indutância desta malha é nula, a corrente nela cai imediatamente para zero quando a chave é aberta. Ou seja,  $i_1 = 0$ . A corrente em  $R_3$  varia lentamente

apenas pois existe um indutor nesta malha. Imediatamente após a chave ser aberta a corrente tem o mesmo valor que tinha no momento anterior ao fechamento da chave. Este valor é  $4.55 - 2.73 \text{ A} = 1.82 \text{ A}$ . A corrente em  $R_2$  é idêntica à corrente em  $R_3$ ,  $1.82 \text{ A}$ .

(d) Nesta situação não existem mais fontes de fem no circuito de modo que eventualmente todas correntes terão decaído para zero.

**P 33-26.**

No circuito mostrado na Fig. 33-18,  $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$ ,  $R_1 = 5 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$  e  $L = 5 \text{ H}$ . Considere as situações: (I) a chave  $S$  acaba de ser fechada e (II) a chave  $S$  ficou fechada durante muito tempo. Calcule para estas duas situações: (a) a corrente  $i_1$  através de  $R_1$ , (b) a corrente  $i_2$  através de  $R_2$ , (c) a corrente  $i$  através da chave, (d) a diferença de potencial através de  $R_2$ , (e) a diferença de potencial através de  $L$ , (f)  $di_2/dt$ .

► (I) Chave  $S$  acaba de ser fechada: neste instante a reação do indutor à variação da corrente (que era nula) é máxima, atuando de modo a tentar manter a corrente (nula) naquele ramo. Portanto:

(a)  $i_1 = i = \mathcal{E}/R_1 = 10/5 = 2 \text{ A}$ .

(b)  $i_2 = 0$ , pois no instante em que a chave é fechada o indutor se opõe ao máximo à passagem de corrente.

(c)  $i = i_1 = 2 \text{ A}$ .

(d)  $V_2 = i_2 R_2 = 0 \times 2 = 0 \text{ V}$ .

(e)  $V_L = \mathcal{E}_L = 10 \text{ V}$ , oposta a  $\mathcal{E}$ .

(f)  $\frac{di_2}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} = \frac{10}{5} = 2 \text{ A/s}$ .

(II) Um longo tempo após o fechamento da chave  $S$  o indutor estará carregado, pronto para reagir caso apareça algum  $di_2/dt \neq 0$ . Entretanto, enquanto não houver variação de corrente através do indutor ele se comporta como um *curto circuito*, ou seja, não reage à passagem da corrente.

(a)  $i_1 = \frac{\mathcal{E}}{R} = 2 \text{ A}$ .

(b)  $di_2/dt = 0 \text{ A/s}$  e  $i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2} = \frac{10}{10} = 1 \text{ A}$ .

(c)  $i = i_1 + i_2 = 3 \text{ A}$ .

(d)  $V_2 = i_2 R_2 = 1 \times 10 = 10 \text{ V}$ .

(e)  $V_L = -L \frac{di_2}{dt} = 0 \text{ V}$ .

(f)  $\frac{di_2}{dt} = 0 \text{ A/s}$ .

**P 33-28\*.**

No circuito mostrado na Fig. 33-20, a chave  $S$  é fechada no instante  $t = 0$ . A partir desse momento, a fonte de corrente constante, através da variação da sua fem, mantém uma corrente constante  $i$  saindo de seu terminal superior. (a) Deduza uma expressão para a corrente através do indutor em função do tempo. (b) Mostre que

a corrente através do resistor é igual à corrente através do indutor no instante  $t = (L/R) \ln 2$ .

► (a) Suponha que  $i$  flui da esquerda para a direita através da chave fechada. Chame de  $i_1$  a corrente no resistor, suposta fluindo para baixo. A lei dos nós fornece  $i = i_1 + i_2$  enquanto que a lei das malhas dá  $i_1 R - L(di_2/dt) = 0$ .

De acordo com a lei dos nós, uma vez que  $di/dt = 0$  pois  $i$  é constante, encontramos que  $di_1/dt = -(di_2/dt)$ . Substituindo este resultado na equação obtida pela lei das malhas segue

$$L \frac{di_1}{dt} + i_1 R = 0.$$

Esta equação é semelhante à dada na secção 33-4, um pouco antes da Eq. 33-20, e sua solução é a Eq. 33-20:

$$i_1 = i_0 e^{-Rt/L},$$

onde  $i_0$  é a corrente através do resistor em  $t = 0$ , imediatamente após a chave ser fechada. Imediatamente após o fechamento da chave o indutor age de modo a evitar o rápido crescimento da corrente na malha que o contém, de modo que naquele instante temos  $i_2 = 0$  e  $i_1 = i$ . Portanto  $i_0 = i$ , de modo que

$$i_1 = i e^{-Rt/L}$$

e

$$i_2 = i - i_1 = i \left[ 1 - e^{-Rt/L} \right].$$

(b) Quando  $i_2 = i_1$ ,

$$e^{-Rt/L} = 1 - e^{-Rt/L},$$

de modo que

$$e^{-Rt/L} = \frac{1}{2}, \quad \text{ou seja,} \quad t = \frac{L}{R} \ln 2.$$

**33.2.4 Energia Armazenada num Campo Magnético – (29/37)**

**E 33-29.**

A energia armazenada num certo indutor é  $25 \text{ mJ}$  quando a corrente é  $60 \text{ mA}$ . (a) Calcular a indutância. (b) Que corrente é necessária para a energia magnética armazenada ser quatro vezes maior?

► (a) Como  $U_B = \frac{1}{2} Li^2 = 25 \text{ mJ}$ , obtemos facilmente

$$L = \frac{2U_B}{i^2} = \frac{2 \times 25 \times 10^{-3}}{(6 \times 10^{-3})^2} = 13.89 \text{ H}.$$

(b) Para que tenhamos  $U'_B = 4U_B = 100$  mJ, precisamos de uma corrente igual a

$$i = \sqrt{\frac{2U'_B}{L}} = \sqrt{\frac{2 \times 100 \times 10^{-3}}{13.89}} \\ = 0.12 \text{ A} = 120 \text{ mA}.$$

**E 33-31.**

Uma bobina com uma indutância de 2 H e uma resistência de  $10 \Omega$  é subitamente ligada a uma bateria de resistência desprezível com  $\mathcal{E} = 100$  Volts. (a) Qual será a corrente de equilíbrio? (b) Que quantidade de energia estará armazenada no campo magnético quando esta corrente for atingida?

► (a)  $i = \mathcal{E}/R = 10$  A.

(b)

$$U_B = \frac{1}{2} Li^2 = (0.5)(2)(10)^2 = 100 \text{ J}.$$

**E 33-32.**

Uma bobina com uma indutância de 2 H e uma resistência de  $10 \Omega$  é subitamente ligada a uma bateria de resistência desprezível com  $\mathcal{E} = 100$  V. Após 0.1 s de a ligação ter sido feita, quais são as taxas com que (a) a energia está sendo armazenada no campo magnético, (b) a energia térmica está aparecendo e (c) a energia está sendo fornecida pela bateria?

► Durante a carga, a corrente é controlada pela equação

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L}) = 10(1 - e^{-5t}).$$

(a)

$$U_B(t) = \frac{1}{2} L [i(t)]^2 \\ = 100(1 - e^{-5t})^2 \\ = 100(1 - 2e^{-5t} + e^{-10t}).$$

$$P_{\text{campo}} = \left. \frac{dU_B}{dt} \right|_{t=0.1s} \\ = 100(10e^{-5 \times 0.1} - 10e^{-10 \times 0.1}) \\ \simeq 238.651 \text{ J/s}.$$

(b) A potência dissipada pela resistência em qualquer instante  $t$  é  $P_R(t) = [i(t)]^2 R$  e, portanto,

$$P_R(t=0.1) = (10[1 - e^{-5 \times 0.1}])^2 \times 10 \\ \simeq 154.818 \text{ W}.$$

(c) A potência fornecida pela bateria em qualquer instante  $t$  é  $P_{\text{bat}}(t) = \mathcal{E} i(t)$ . No instante  $t = 0.1$  s temos

$$P_{\text{bat}}(t=0.1) = \frac{\mathcal{E}^2}{R} (1 - e^{-5 \times 0.1}) \simeq 393.469 \text{ J/s}.$$

Tendo calculado este três valores, podemos verificar se existe ou não conservação da energia:  $P_{\text{campo}} + P_R = P_{\text{bat}}$ . Verificamos que realmente existe:  $154.818 + 238.651 = 393.469$ .

**P 33-33.**

Suponha que a constante de tempo indutiva para o circuito da Fig. 33-6 seja de 37 ms e que a corrente no circuito seja zero no instante  $t = 0$ . Em que instante a taxa de dissipação de energia no resistor é igual à taxa com que a energia está sendo armazenada no indutor?

► Dizer-se que a dissipação no resistor é igual à taxa de armazenamento de energia no indutor equivale a dizer-se que

$$R i^2 = \mathcal{E}_L i.$$

A corrente que obedece a condição inicial é

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L}).$$

Como sabemos que  $\mathcal{E}_L = L di/dt$ , podemos re-escrever a primeira das equações acima, já tendo eliminado o fator  $i$  comum aos dois membros e lembrando que  $\tau_L = L/R$ , como

$$R i = L \frac{di}{dt} \\ \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L}) = L \left( \frac{-\mathcal{E}}{R} \right) \left( \frac{-R}{L} \right) e^{-Rt/L} \\ 1 - e^{-Rt/L} = e^{-Rt/L} \\ 1 = 2 e^{-t/\tau_L} \\ \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{t}{\tau_L}.$$

Conseqüentemente,

$$t = -\tau_L \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ = -37 \times (-0.6931) = 25.6 \text{ ms}.$$

**P 33-34.**

Uma bobina está ligada em série com um resistor de  $10\text{ k}\Omega$ . Quando uma bateria de  $50\text{ V}$  é ligada ao circuito, a corrente atinge o valor de  $2\text{ mA}$  após  $5\text{ ms}$ . **(a)** Determine a indutância da bobina. **(b)** Que quantidade de energia está armazenada na bobina neste momento?

► **(a)** Se a bateria é aplicada no instante  $t = 0$ , a corrente é dada por

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-t/\tau_L}\right),$$

onde  $\mathcal{E}$  é a fem da bateria,  $R$  é a resistência e  $\tau_L = L/R$  é a constante de tempo indutiva. Portanto

$$e^{-t/\tau_L} = 1 - \frac{iR}{\mathcal{E}}$$

donde sai

$$-\frac{t}{\tau_L} = \ln \left[1 - \frac{iR}{\mathcal{E}}\right].$$

Numericamente temos

$$\begin{aligned} \ln \left(1 - \frac{iR}{\mathcal{E}}\right) &= \ln \left(1 - \frac{(2 \times 10^{-3})(10 \times 10^3)}{50}\right) \\ &= -0.5108, \end{aligned}$$

fazendo com que a constante de tempo indutiva seja dada por  $\tau_L = t/0.5108 = (5 \times 10^{-3}\text{ s})/0.5108 = 9.79 \times 10^{-3}\text{ s}$  e, finalmente,

$$\begin{aligned} L = R\tau_L &= (9.79 \times 10^{-3}\text{ s})(10 \times 10^3\ \Omega) \\ &= 97.9\text{ H}. \end{aligned}$$

**(b)** A energia armazenada na bobina é

$$\begin{aligned} U_B = \frac{1}{2}Li^2 &= \frac{1}{2}(97.9)(2 \times 10^{-3})^2 \\ &= 1.96 \times 10^{-4}\text{ J}. \end{aligned}$$

### P 33-37.

Prove que, quando a chave  $S$  da Fig. 33-5 é girada da posição  $a$  para a posição  $b$ , toda energia armazenada no indutor aparece como energia térmica no resistor.

► Suponha que a chave tenha estado na posição  $a$  por um tempo longo, de modo que a corrente tenha atingido seu valor de equilíbrio  $i_0$ . A energia armazenada no indutor é  $U_B = Li_0^2/2$ . Então, no instante  $t = 0$ , a chave é colocada na posição  $b$ . A partir de então a corrente é dada por

$$i = i_0 e^{-t/\tau_L},$$

onde  $\tau_L$  é a constante de tempo indutiva, dada por  $\tau_L = L/R$ . A taxa com a qual a energia térmica é gerada no resistor é

$$P = i^2 R = i_0^2 R e^{-2t/\tau_L}.$$

Durante um período longo de tempo a energia dissipada é

$$\begin{aligned} E = \int_0^\infty P dt &= i_0^2 R \int_0^\infty e^{-2t/\tau_L} dt \\ &= -\frac{1}{2} i_0^2 R \tau_L e^{-2t/\tau_L} \Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{2} i_0^2 R \tau_L. \end{aligned}$$

Substituindo-se  $\tau_L = L/R$  nesta expressão tem-se

$$E = \frac{1}{2} Li_0^2,$$

que é idêntica à energia  $U_B$  originalmente armazenada no indutor.

### 33.2.5 Densidade de Energia de um Campo Magnético – (38/46)

#### E 33-38.

Um solenóide tem um comprimento de  $85\text{ cm}$  e seção transversal de área igual a  $17\text{ cm}^2$ . Existem  $950$  espiras de fio transportando uma corrente de  $6.6\text{ A}$ . **(a)** Calcule a densidade de energia do campo magnético no interior do solenóide. **(b)** Determine, nessa região, a energia total armazenada no campo magnético. (Despreze os efeitos das extremidades.)

► **(a)** Em qualquer ponto, a densidade de energia magnética é dada por  $u_B = B^2/(2\mu_0)$ , onde  $B$  é a magnitude do campo magnético naquele ponto. Dentro do solenóide  $B = \mu_0 n i$ , onde  $n$  é o número de espiras por unidade de comprimento e  $i$  é a corrente. No presente caso,  $n = (950)/(0.85\text{ m}) = 1.118 \times 10^3\text{ m}^{-1}$ . A densidade de energia magnética é

$$\begin{aligned} u_B &= \frac{1}{2} \mu_0 n^2 i^2 \\ &= \frac{1}{2} (4\pi \times 10^{-7}) (1.118 \times 10^3)^2 (6.6)^2 \\ &= 34.2\text{ J/m}^3. \end{aligned}$$

**(b)** Como o campo magnético é uniforme dentro de um solenóide ideal, a energia total armazenada é  $U_B = u_B V$ , onde  $V$  é o volume do solenóide.  $V$  é igual ao

produto da secção transversal pelo comprimento. Portanto

$$U_B = (34.2)(17 \times 10^{-4})(0.85) = 4.94 \times 10^{-2} \text{ J.}$$

**E 33-39.**

Um indutor toroidal de 90 mH delimita um volume de  $0.02 \text{ m}^3$ . Se a densidade média de energia no toróide for de  $70 \text{ J/m}^3$ , qual será a corrente que circula no indutor toroidal?

► A energia magnética armazenada no toróide pode ser escrita de dois modos distintos:  $U_B = Li^2/2$  ou  $U_B = u_B V$ , onde  $u_B$  é a densidade média de energia e  $V$  o volume. Portanto, igualando as duas expressões obtemos

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{\frac{2u_B V}{L}} = \sqrt{\frac{2(70 \text{ J/m}^3)(0.02 \text{ m}^3)}{90 \times 10^{-3} \text{ H}}} \\ &= 5.58 \text{ A.} \end{aligned}$$

**P 33-44.**

(a) Determine uma expressão para a densidade de energia em função da distância radial para o toróide do Exemplo 33-1. (b) Integrando a densidade de energia por todo o volume do toróide, calcule a energia total armazenada no toróide; suponha  $i = 0.5 \text{ A}$ . (c) Usando a Eq. 33-24, calcule a energia armazenada no toróide diretamente da indutância e compare o resultado com o do item (b).

► (a) A densidade de energia é dada pela Eq. 33-26,  $u_B = B^2/(2\mu_0)$ , sendo o campo magnético de um toróide dado pela Eq. 31-22:  $B = \mu_0 i N / 2\pi r$ . Portanto

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(\mu_0 i N / 2\pi r)^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 i^2 N^2}{8\pi^2 r^2}.$$

(b) Calcule a integral  $U_B = \int u_B dV$  sobre o volume do toróide. Considere como elemento de volume o volume compreendido entre dois toróides coaxiais de raios  $r$  e  $r + dr$ , com seus eixos coincidindo com o eixo do toróide dado. Neste caso temos então  $dV = 2\pi r h dr$ , de modo que

$$\begin{aligned} U_B &= \int u_B dV \\ &= \int_a^b \frac{\mu_0 i^2 N^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r h dr \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \mu_0 i^2 N^2 h \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Explicitamente,

$$\begin{aligned} U_B &= \frac{(4\pi \times 10^{-7})(0.5)^2(1250)^2(13 \times 10^{-3})}{4\pi} \times \\ &\quad \times \ln\left(\frac{95}{52}\right) \\ &= 3.06 \times 10^{-4} \text{ J.} \end{aligned}$$

(c) A indutância  $L$  é fornecida pela Eq. 33-7:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Portanto, usando a Eq. 33-24, temos

$$U_B = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{\mu_0 N^2 i^2 h}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Como não poderia deixar de ser, esta expressão é idêntica a encontrada na parte (b).

**33.2.6 Indutância Mútua – (47/53)****E 33-47.**

Dois bobinas estão em posições fixas. Quando na bobina 1 não há corrente e na bobina 2 existe uma corrente que cresce numa taxa constante de  $15 \text{ A/s}$ , a fem na bobina 1 vale  $25 \text{ mV}$ . (a) Qual é a indutância mútua destas bobinas? (b) Quando não há corrente na bobina 2 e a bobina 1 é percorrida por uma corrente de  $3.6 \text{ A}$ , qual é o fluxo através da bobina 2?

► (a) A indutância mútua  $M$  é dada por

$$\mathcal{E}_1 = M \frac{di_2}{dt},$$

onde  $\mathcal{E}_1$  é a fem na bobina 1 devida à corrente que está variando na bobina 2. Portanto,

$$M = \frac{\mathcal{E}}{di_2/dt} = \frac{25 \times 10^{-3}}{15} = 1.67 \times 10^{-3} \text{ H.}$$

(b) O fluxo concatenado na bobina 2 é

$$\begin{aligned} N_2 \Phi_{21} &= M i_1 = (1.67 \times 10^{-3})(3.6) \\ &= 6.01 \times 10^{-3} \text{ Wb.} \end{aligned}$$

**P 33-49.**

Dois bobinas estão ligadas conforme mostra a Fig. 33-21. Suas indutâncias valem  $L_1$  e  $L_2$ . O coeficiente de

indutância mútua é  $M$ . **(a)** Mostre que a combinação pode ser substituída por uma única bobina de indutância equivalente dada por

$$L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 + 2M.$$

**(b)** Como as bobinas da Fig. 33-21 deveriam ser ligadas para que a indutância equivalente fosse dada por

$$L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 - 2M.$$

(Este problema é uma extensão do Problema 5, tendo sido eliminada a exigência de que a distância entre as bobinas deveria ser muito grande.)

► **(a)** Suponha que a corrente esteja variando a uma taxa  $di/dt$  e calcule a fem total através de ambas bobinas. Considere primeiro a bobina à esquerda. O campo magnético devido à corrente nesta bobina aponta para a esquerda. Também para a esquerda aponta o campo magnético devido à corrente na bobina 2. Quando a corrente aumenta ambos os campos aumentam e ambas variações no fluxo contribuem com fem na mesma direção. Portanto a fem na bobina 1 é

$$\mathcal{E}_1 = -(L_1 + M) \frac{di}{dt}.$$

O campo magnético na bobina 2 devido à corrente nela aponta para a esquerda, como também o faz o campo na bobina 2 devido à corrente na bobina 1. As duas fontes de fem estão novamente na mesma direção e a fem na bobina 2 é

$$\mathcal{E}_2 = -(L_2 + M) \frac{di}{dt}.$$

A fem total através de ambas bobinas é

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = -(L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}.$$

Esta é exatamente a mesma fem que seria produzida se as bobinas fossem substituídas por uma única bobina com indutância  $L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 + 2M$ .

**(b)** Reverta os terminais da bobina 2 de modo que a corrente entre pela parte de trás da bobina em vez de entrar pela frente como mostrado no diagrama. Neste caso o campo produzido pela bobina 2 no local onde está a bobina 1 opõe-se ao campo gerado pela bobina 1. Os fluxos tem sinais opostos. Uma corrente crescente na bobina 1 tende a aumentar o fluxo nela mas uma corrente crescente na bobina 2 tende a diminuir-lo. A fem através da bobina 1 é

$$\mathcal{E}_1 = -(L_1 - M) \frac{di}{dt}.$$

Analogamente, a fem na bobina 2 é

$$\mathcal{E}_2 = -(L_2 - M) \frac{di}{dt}.$$

A fem total através de ambas bobinas é agora

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = -(L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt}.$$

Esta é exatamente a mesma fem que seria produzida se as bobinas fossem substituídas por uma única bobina com indutância  $L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 - 2M$ .

### P 33-52.

A Fig. 33-24 mostra, em seção transversal, dois solenóides coaxiais. Mostre que o coeficiente de indutância mútua  $M$  para um comprimento  $\ell$  desta combinação solenóide-solenóide é dado por

$$M = \pi R_1^2 \ell \mu_0 n_1 n_2,$$

onde  $n_1$  é o número de espiras por unidade de comprimento do solenóide 1 e  $n_2$  é o número de espiras por unidade de comprimento do solenóide 2.  $R_1$  é o raio do solenóide interno. Explique por que  $M$  depende de  $R_1$  mas não depende de  $R_2$ , o raio do solenóide externo.

► Assuma que a corrente no solenóide 1 é  $i$  e calcule o fluxo concatenado no solenóide 2. A indução mútua é igual a este fluxo dividido por  $i$ . O campo magnético dentro do solenóide 1 é paralelo ao eixo e tem magnitude  $B = \mu_0 i n_1$  uniforme, onde  $n_1$  é o número de espiras por unidade de comprimento do solenóide. A área da seção reta do solenóide é  $\pi R_1^2$  e, como o campo é perpendicular a uma seção reta, o fluxo através da seção reta é

$$\Phi = AB = \pi R_1^2 \mu_0 n_1 i.$$

Como o campo magnético é nulo fora do solenóide, este é também o valor do fluxo através de uma seção do solenóide 2. O número de espiras num comprimento  $\ell$  do solenóide 2 é  $N_2 = n_2 \ell$  e o fluxo concatenado é

$$N_2 \Phi = n_2 \ell \pi R_1^2 \mu_0 n_1 i.$$

A indutância mútua é, portanto,

$$M = \frac{N_2 \Phi}{i} = \pi R_1^2 \ell \mu_0 n_1 n_2.$$

$M$  não depende de  $R_2$  porque não existe campo magnético na região entre os solenóides. Mudando  $R_2$  não se altera o fluxo através do solenóide 2; mas mudando  $R_1$ , o fluxo altera-se.

► Usando a Eq. 33-33,  $\varepsilon_2 = -M di_1/dt$ . O fluxo entre o solenóide de dentro e o de fora é:

$$\Phi_{12} = \int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{A}$$

onde  $B_1$  é o campo gerado pela corrente  $i_1$  do solenóide de dentro e a integral é sobre a área da seção transversal do solenóide de fora. Mas  $B_1 = \mu_0 n_1 i_1$  dentro do solenóide 1 e zero do lado de fora. Assim, não existe contribuição para a integral na área entre os solenóides (e, portanto, o tamanho do solenóide 2 não importa); então,

$$\Phi_{21} = B_1(\pi R^2) = \mu_0 n_1 \pi R_1^2 i_1.$$

Como existem  $n_2 \ell$  espiras no solenóide 2 num comprimento  $\ell$ , segundo a Lei de Indução de Faraday, podemos escrever a seguinte relação:

$$\varepsilon_2 = -n_2 \ell \frac{d\Phi_{21}}{dt} = -n_2 \ell \mu_0 n_1 \pi R_1^2 \frac{di_1}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}.$$

Portanto, comparando os coeficientes, obtemos

$$M = \mu_0 n_1 n_2 \pi R_1^2 \ell.$$